

Orlicz 空间中一类椭圆型方程解的迭代算子范数估计

吕月明, 李小欢

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:为研究微分形式上迭代算子的相关估计,运用 Jensen 不等式、Young 不等式、结合 $G(p, q, C)$ 类函数及 Whitney 覆盖定理的性质,将格林算子与 Dirac 算子迭代对微分形式 A -调和方程解的 L^p 估计推广到 Orlicz 空间中,得到了相关算子迭代的局部及全局估计。

关键词:Orlicz 空间; 迭代算子; 格林算子; Hodge-Dirac 算子; 微分形式

DOI:10.15938/j.jhust.2023.06.016

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)06-0138-07

Iterator Operator Norm Estimation for Solutions to a Class of Elliptic Equations in Orlicz Space

LÜ Yueming, LI Xiaohuan

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract:To study the related estimation of iterative operators on differential form, we apply the Jensen inequality, Young equation, $G(p, q, C)$ class function and Whitney coverage theorem to extend the L^p estimation of A -harmonic equation of Green and Dirac operator to Orlicz space, and obtain the local and global estimation of correlation operator iteration.

Keywords:Orlicz space; iterative operator; Green operator; Hodge-Dirac operator; differential form

0 引言

算子理论一直是调和分析研究的主要内容。也是偏微分方程发展的重要工具。近些年,算子估计在各种形式的空间中被广泛地研究。同时也在 A -调和方程的发展中起到了重要的作用,特别是对算子的有界性、可积性的研究,促进了 A -调和方程解的性质的研究。

目前,在 A -调和方程的研究中,复合算子的迭代估计引起了许多数学工作者的关注,并取得了丰硕的成果。2003 年, Ding 在文[1]中证明了格林算子 G 在 $\mathbb{R}^n$ 空间与 Sobolev 空间的 Poincaré 类型不

等式。2013 年, Ding 和 Liu 等在文[2]中将 Hodge-Dirac 算子 D 与 Green 算子 G 进行复合,讨论了复合算子 DG 的范数有界性,并将其 L^p 范数、BMO 范数和局部 Lipschitz 范数进行了比较,得到了在不同范数意义下的比较定理。2015 年, Wang 等在[3]中得到了极大算子、微分算子与格林算子的复合的有界性估计,并讨论了该复合算子在不同范数下的比较定理。2016 年, Ding 等在文[4]中证明了迭代算子 $D^k G^k$ 的 L^p -高阶积分不等式。2017 年, 邢宇明等[5]证明了同伦算子与格林算子复合的高阶可积性及其嵌入定理。更多关于微分形式上的算子理论成果可参见文[6-10]。

在上述研究的基础上,本文主要研究 Orlicz 空

收稿日期: 2022-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(11901140); 黑龙江省自然科学基金(A2018009); 黑龙江省普通本科高等学校青年创新人才培养项目(UN-PYSCT-2018206)。

作者简介: 李小欢(1995—),男,硕士研究生。

通信作者: 吕月明(1984—),女,博士,讲师, E-mail: liyueminglu@hrbust.edu.cn。

间中 Dirac 算子与格林算子对 A -调和方程解作用的高阶迭代估计。

1 预备知识

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基, 本文用 $\Lambda^l = \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 所张成的 l -协变张量空间。记符号 $\wedge$ 表示协变张量之间的外积运算。 $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_l}$, 其中 $I = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ 且 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq n$ 。 $\mathbb{R}^n$ 的 Grassman 代数表示为 $\Lambda = \Lambda(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{l=0}^n \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 。在应用过程中, 一般取 $\{dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n\}$ 是协变张量空间 $\Lambda^1 = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ 的自然生成元。

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有界可测凸区域, 则称形如

$$d^* A(x, du) = 0 \quad (1)$$

的方程称为微分形式 A -调和方程。其中, 算子

$$A: \mathbb{R} \times \Lambda^l(\mathbb{R}) \rightarrow \Lambda^l(\mathbb{R})$$

同时满足

$$|A(x, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1}$$

$$\langle A(x, \xi), \xi \rangle \geq c_2 |\xi|^p$$

其中 $c_i > 0 (i = 1, 2)$, 并且 $p > 1$, 对于所有的 $x \in \Omega$ 和所有的 $\xi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 几乎处处成立。

接下来, 给出本文所涉及的主要定义。无特别说明, 全文总假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界可测凸区域。

定义 1^[11] 广义 Schwartz 函数 $f: \Omega \rightarrow \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 是微分 l -形式, 记为 $f \in D'(\Omega, \Lambda^l)$, 对于任意的 $x \in \Omega$, f 可被唯一的表示为

$$f(x) = \sum f_I(x) dx_I = \sum f_{i_1 i_2 \dots i_l}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}$$

其中: $l = 1, 2, \dots, n; I = (i_1, i_2, \dots, i_l), 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq n$ 。

定义 2^[12] 1) d 是外微分算子 $d: \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{l+1}(\mathbb{R}^n)$ 。

2) Hodge 星算子定义为

$$*: \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{n-l}(\mathbb{R}^n)$$

3) 算子 d 的伴随算子 d^* , 又称 Hodge 余外微分算子, 定义为

$$d^* = (-1)^{n(l+1)} * d * : D'(\Omega, \Lambda^{l+1}) \rightarrow D'(\Omega, \Lambda^l)$$

并且同时满足

$$D = d + d^*$$

$$\Delta = D^2 = dd^* + d^*d$$

这里 Δ 是 Laplace-Beltrami 算子, 外微分算子 d 与余

外微分算子 d^* 满足

$$dd = 0, d^*d^* = 0$$

定义 3^[13] 1) 微分形式空间 $L^p(\Omega, \Lambda^l)$ 定义为

$$L^p(\Omega, \Lambda^l) = \{f = \sum f_I dx_I : f_I \in L^p(\Omega)\}$$

而其范数定义为

$$\|f(x)\|_{L^p(\Omega, \Lambda^l)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

2) 微分形式空间 $W^{1,p}(\Omega, \Lambda^l)$ 定义为

$$W^{1,p}(\Omega, \Lambda^l) = \{f = \sum f_I dx_I : f_I \in L^p(\Omega), \nabla f_I \in L^p(\Omega)\}$$

而其范数定义为

$$\|f(x)\|_{W^{1,p}(\Omega, \Lambda^l)} = \|f(x)\|_{L^p(\Omega, \Lambda^l)} + \|\nabla f(x)\|_{L^p(\Omega, \Lambda^l)}$$

定义 4 如果微分形式 $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 满足

$$\int_{\Omega} A(x, du) d\varphi = 0$$

则称 $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 是方程的弱解。其中 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 。

定义 5^[19] 如果 $\varphi(x): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是连续、单调递增的函数且满足 $\varphi(0) = 0$, 则称 $\varphi(x)$ 为 Orlicz 函数。并且当 Orlicz 函数为凸函数时, 又称为 Young 函数。

定义 6^[15] 若对于任意的 $x > 0$, 总存在一个正常数 C , 使得

$$\varphi(2x) \leq C\varphi(x)$$

成立, 则称函数 $\varphi(x)$ 满足全局 Δ_2 条件, 表示为 $\varphi(x) \in \Delta_2$ 。同时, 若总存在一个常数 $T > 1$, 对于任意的 $x > 0$, 总有

$$\varphi(x) \leq \frac{\varphi(Tx)}{2T}$$

成立, 则称函数 $\varphi(x)$ 满足全局 ∇_2 条件, 表示为 $\varphi(x) \in \nabla_2$ 。

注: 如果 $\varphi(x) \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, 对于任意的常数 $\theta_1 > 0$, 总存在一个正常数 α , 使得

$$\varphi(\theta_1 x) \leq \alpha \varphi(x)$$

定义 7^[16-18] 1) Orlicz 空间 $L^\varphi(\Omega)$ 定义为

$$L^\varphi(\Omega) = \{f(x) : \int_{\Omega} \varphi(f(x)) dx < \infty\}$$

而其 $f(x)$ 在 Orlicz 空间的范数定义为

$$\|f(x)\|_{L^\varphi(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \varphi(\lambda^{-1} f(x)) dx \leq 1 \right\}$$

2) 微分形式的 Orlicz 空间 $L^\varphi(\Omega, \Lambda^l)$ 定义为

$$L^\varphi(\Omega, \Lambda^l) = \{f = \sum f_I dx_I : f_I \in L^\varphi(\Omega)\}$$

而其 Orlicz 范数定义为

$$\|f(x)\|_{L^{\varphi}(\Omega, \Lambda^l)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(\lambda^{-1}f(x))dx \leq 1\right\}$$

3) 微分形式的 Orlicz-Sobolev 空间 $W^{1,\varphi}(\Omega, \Lambda^l)$ 定义为

$$W^{1,\varphi}(\Omega, \Lambda^l) = \{f = \sum_i f_i dx_i, f_i \in L^{\varphi}(\Omega), \nabla f_i \in L^{\varphi}(\Omega)\}$$

而其 Orlicz 范数定义为

$$\|f(x)\|_{W^{1,\varphi}(\Omega, \Lambda^l)} = \|f(x)\|_{L^{\varphi}(\Omega)} + \|\nabla f(x)\|_{L^{\varphi}(\Omega)}$$

定义 8^[19] 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是定义在 $[0, \infty)$ 的单调递增的下凸和上凸函数, 且 $1 \leq p < q < \infty$, 如果对于任意 $x > 0$, 存在常数 $C > 1$ 使得 Orlicz 函数 φ 同时满足

$$1/C \leq \varphi(x^{1/p})/f(x) \leq C$$

和

$$1/C \leq \varphi(x^{1/q})/g(x) \leq C$$

则称 Orlicz 函数 φ 属于 $G(q, p, C)$ - 类。

注: 由定义易得

$$C_1 t^p \leq f^{-1}(\varphi(t)) \leq C_2 t^p \quad (2)$$

$$C_3 t^q \leq g^{-1}(\varphi(t)) \leq C_4 t^q \quad (3)$$

其中 $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是正常数。

定义 9^[20] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界可测凸域, 且对于任意点 $y \in \Omega$, 线性算子

$$K_y: C^{\infty}(\Omega, \Lambda^{l+1}) \rightarrow C^{\infty}(\Omega, \Lambda^l)$$

可表示为

$$K_y u(x, \xi_1, \dots, \xi_{l-1}) = \int_0^1 t^{l-1} u(tx + (1-t)y; x-y, \xi_1, \dots, \xi_{l-1}) dt$$

则同伦算子 $T: C^{\infty}(\Omega, \Lambda^l) \rightarrow C^{\infty}(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 定义为

$$Tu = \int_{\Omega} \psi(y) K_y u dy, \text{ 其中 } \psi(y) \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ 且满足 } \int_{\Omega} \psi(y) dy = 1.$$

定义 10^[21] 给定每一点 $u \in L^p(\Omega, \Lambda)$, 格林算子定义为

$$G: L^p(\Omega, \Lambda) \rightarrow W^{1,p}(\Omega, \Lambda) \cap H^{\perp}, 1 < p < \infty$$

且满足

$$G(u) = \delta(u - H(u))$$

这里 $H: L^p(\Omega, \Lambda) \rightarrow H$ 是投影算子, 使得对于任意 $u \in L^p(\Omega, \Lambda)$ 有 $dH(u) = d^*H(u) = 0$ 。

本文所用引理如下。

引理 1^[20] 设微分形式 $u \in L_{loc}^p(\Omega, \Lambda^l)$ 满足 $du \in L_{loc}^p(\Omega, \Lambda^{l+1})$, 则 $dTu \in L_{loc}^p(\Omega, \Lambda^l)$ 且

$$u = dT(u) + Td(u) \quad (4)$$

其中 $1 \leq p < \infty, l = 1, 2, \dots, n$ 。特别地, 当 $1 < p < \infty$ 时, $T: L^p(\Omega, \Lambda^l) \rightarrow W^{1,p}(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 是有界算子, 且存在与 u 无关正常数 C , 使得

$$\|Tu\|_{p,\Omega} \leq C \text{diam}(\Omega) \|u\|_{p,\Omega} \quad (5)$$

$$\|\nabla Tu\|_{p,\Omega} \leq C \|u\|_{p,\Omega} \quad (6)$$

注: $u_{\Omega} \in D'(\Omega, \Lambda^l)$ 闭微分形式 $u_{\Omega} = dTu$ 。

引理 2^[21] (Hodge 分解定理) 设 M 是紧致的、定向的光滑无边黎曼流形, 对于任意的 $u \in L^p(\Lambda^l M)$, 以下分解

$$u = \Delta G(u) + H(u) \quad (7)$$

和

$$u = dd^*G(x) + d^*dG(x) + H(x) \quad (8)$$

都成立, 其中 $\dim(M)$ 表示微分流形 M , 指数 $1 < p < \infty$ 并且 $1 \leq l \leq \dim(M)$ 。

引理 3^[21] 设微分形式 $u \in L^p(\Omega, \Lambda^l)$ 且 G 是格林算子, 且存在与 u 无关正常数 C , 使得

$$\|dd^*G(u)\|_{p,B} + \|d^*dG(u)\|_{p,B} + \|dG(u)\|_{p,B} + \|d^*G(u)\|_{p,B} + \|G(u)\|_{p,B} \leq C \|u\|_{p,\sigma B}$$

对于任意球体 $B \subset \sigma B \subset \Omega$ 恒成立, 其中参数

$$\sigma > 1, l = 0, 1, 2, \dots, n \text{ 且 } 1 < p < \infty.$$

注: 1) Laplace 算子 $\Delta = dd^* + d^*d$ 且 Hodge-Dirac 算子 $D = d^* + d$, 所以由引理可得到如下估计式

$$\|G(u)\|_{p,B} \leq C \|u\|_{p,\sigma B}$$

$$\|\Delta G(u)\|_{p,B} \leq C \|u\|_{p,\sigma B}$$

$$\|DG(u)\|_{p,B} \leq C \|u\|_{p,\sigma B}$$

其中球体 $B \subset \sigma B \subset \Omega$ 且参数 $\sigma > 1$ 。

2) 外微分算子 d 和余外微分算子 d^* 与格林算子 G 是可以交换的, 即

$$dG = Gd, d^*G = Gd^*, DG = GD \quad (9)$$

引理 4^[4] 1) 设有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 微分形式 $u \in L_{loc}^s(\Omega, \Lambda)$, D 是 Hodge-Dirac 算子, 且 G 是格林算子, 则对于任意正整数 $k = 1, 2, \dots$, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|D^k G^k(u)\|_{s,B} \leq C \|u\|_{s,\sigma B}$$

对于所有球体 $B \subset \sigma B \subset \Omega$ 均成立, 其中 $\sigma > 1$ 是某一参数且指数 $1 < s < \infty$ 。

2) 设有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 微分形式 $u \in L_{loc}^s(\Omega, \Lambda)$, D 是 Hodge-Dirac 算子, 且 G 是 Green 算子, 则对于任意正整数 $k = 1, 2, \dots$, 存在常数 $C > 0$, 与微分形式 u 无关, 使得

$$\|D^{k+1} G^k(u)\|_{s,B} \leq C \|u\|_{s,\sigma B}$$

对于所有球体 $B \subset \sigma B \subset \Omega$ 均成立, 其中 $\sigma > 1$ 是某一参数且指数 $1 < s < \infty$ 。

引理 5^[22] (弱逆 Hölder 不等式) 设 $u \in \Omega$ 是微分形式 A -调和方程(1)的解, 则存在一个正常数 C , 使得

$$\|u\|_{s,B} \leq C \|u\|_{t,\sigma B}$$

其中 $C = C(s, t, n, \sigma)$, $\sigma > 1, 0 < s, t < \infty$, 并且对于每个球 $B \in \Omega$ 都有 $\sigma B \in \Omega$ 。

引理 6^[23] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, 则 Ω 有一个修正的 Whitney 覆盖 $V = \{Q_i\}$ 使得

$$\bigcup_i Q_i = \Omega, \sum_{Q_i \in V} \chi_{\sqrt{\frac{5}{4}}Q_i} \leq N_{\chi\Omega}$$

其中 $N \geq 1$ 是某一正整数。而且, 如果 $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, 则存在含于 $Q_i \cap Q_j$ 中的方体 R , 使得 $Q_i \cap Q_j \subset NR$ 。

2 主要结果及证明

本节主要研究 Hodge-Dirac 算子 D 与格林算子 G 的迭代对微分形式 A -调和方程解的估计。首先给出迭代算子 $D^k G^k$ 的 L^φ -估计。

定理 1 $u \in L^1(\Omega, \Lambda^l)$ 是微分形式 A -调和方程(1)的解且满足 $\varphi(|u|) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\varphi(x) \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ 且是 $G(p, q, C)$ -类 Young 函数, 则存在与 u 无关常数 $C > 0$, 使得

$$\|D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B\|_{L^\varphi_B} \leq C \|u\|_{L^\varphi_{\sigma_2 B}}$$

成立, 其中 $B \subset \sigma_2 B \subset \Omega, \sigma_2 > 1$ 。

证明: 因为 $D^k G^k(u)$ 是 l -微分形式, 所以由式(4)可得

$$D^k G^k(u) = Td(D^k G^k(u)) + dT(D^k G^k(u))$$

又由引理 1 中的注可知

$$dT(D^k G^k(u)) = (D^k G^k(u))_B$$

故

$$\begin{aligned} & \|D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B\|_{L^\varphi_B} \\ &= \|Td(D^k G^k(u))\|_{L^\varphi_B} \end{aligned}$$

已知 g 是单调递增下凸函数, 因此 g^{-1} 为上凸函数, 则由式(3)、 $G(p, q, C)$ -类的性质及 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} & \int_B \varphi(Td(D^k G^k(u))) dx = \\ & gg^{-1}(\int_B \varphi(Td(D^k G^k(u))) dx) \leq \\ & g(\int_B g^{-1}(\varphi(Td(D^k G^k(u)))) dx) \leq \\ & g(\int_B C(Td(D^k G^k(u)))^q dx) \leq \\ & C\varphi(\int_B (Td(D^k G^k(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

由式(5)及 G 算子与 D 算子的交换性可得

$$\begin{aligned} & \int_B \varphi(Td(D^k G^k(u))) dx \leq \\ & C\varphi(\int_B (d(D^k G^k(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & C\varphi(\int_B (dG(D^k G^{k-1}(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

由引理 3 和引理 4 可得

$$\begin{aligned} & \int_B \varphi(Td(D^k G^k(u))) dx \leq \\ & C\varphi(\int_{\sigma B} (D^k G^{k-1}(u))^q dx)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & C\varphi(\int_{\sigma_1 B} |u|^q dx)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\sigma_1 > \sigma > 1$ 。

已知 f 是单调递增下凸函数, 则由式(2)、弱逆 Hölder 不等式、 $G(p, q, C)$ -类的性质及 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} & C\varphi(\int_{\sigma_1 B} |u|^q dx)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & Cf \circ f^{-1} \circ \varphi(\int_{\sigma_2 B} |u|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & C(\int_{\sigma_2 B} f(|u|^p) dx) \leq \\ & C(\int_{\sigma_2 B} \varphi(|u|) dx) \end{aligned}$$

其中 $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma > 1$ 。

结合式(10)、(11)可得

$$\int_B \varphi(Td(D^k G^k(u))) dx \leq C(\int_{\sigma_2 B} \varphi(|u|) dx)$$

对于任意 $\sigma_2 B \subset \Omega$ 及任意的 $\lambda > 0$ 可得

$$\int_B \varphi\left(\frac{Td(D^k G^k(u))}{\lambda}\right) dx \leq C\left(\int_{\sigma_2 B} \varphi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) dx\right)$$

因此

$$\|D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B\|_{L^\varphi_B} \leq C \|u\|_{L^\varphi_{\sigma_2 B}}$$

定理得证。

下面给出微分形式 A -调和方程解 u 的迭代算子 $(D^k G^k(u))_B$ 的估计。

定理 2 在定理 1 的条件下, 存在与 u 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\|(D^k G^k(u))_B\|_{L^\varphi_B} \leq C \|u\|_{L^\varphi_{\sigma B}}$$

成立, 其中 $B \subset \sigma B \subset \Omega, \sigma > 1$ 。

证明: 由引理 1 中的注可知

$$dT(D^k G^k(u)) = (D^k G^k(u))_B$$

已知 g 是单调递增下凸函数, 因此 g^{-1} 为上凸函数, 则由 $G(p, q, C)$ -类的性质, Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} & \int_B \varphi(dT(D^k G^k(u))) dx = \\ & gg^{-1}(\int_B \varphi(dT(D^k G^k(u))) dx) \leq \\ & g(\int_B g^{-1}(\varphi(dT(D^k G^k(u)))) dx) \leq \\ & g(\int_B C(dT(D^k G^k(u)))^q dx) \leq \\ & C\varphi(\int_B (dT(D^k G^k(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

类似于定理1的过程可以得到

$$\| (D^k G^k(u))_B \|_{L_B^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\sigma_2 B}^\varphi}$$

定理得证。

结合定理1与定理2可以得到微分形式A-调和方程解 u 的迭代算子 $D^k G^k(u)$ 的如下 L^φ -估计。

$$\| D^k G^k(u) \|_{L_B^\varphi} \leq \| D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B \|_{L_B^\varphi} + \| (D^k G^k(u))_B \|_{L_B^\varphi}$$

即有如下定理成立。

定理3 在定理1的条件下,存在与 u 无关正常数 $C > 0$,使得

$$\| D^k G^k(u) \|_{L_B^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\sigma B}^\varphi}$$

成立,其中 $B \subset \sigma B \subset \Omega, \sigma > 1$ 。

注:类似可证

$$\| \nabla Td(D^k G^k(u)) \|_{L_B^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\sigma_2 B}^\varphi}$$

$$\| Td(D^k G^k(u)) \|_{L_B^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\sigma_2 B}^\varphi}$$

进一步推广定理1,增加格林算子的阶数,可得迭代算子 $D^k G^{k+l}$ 的 L^φ -估计。

推论 在定理1的条件下,则存在与微分形式 u 无关正常数 C ,使得

$$\| D^k G^{k+l}(u) - (D^k G^{k+l}(u))_B \|_{L_B^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\sigma B}^\varphi}$$

成立,其中 $B \subset \sigma B \subset \Omega, \sigma > 1, l \in \mathbb{N}^+$ 。

下面借助Whitney迭代覆盖引理,我们给出在Orlicz-Sobolev空间下,给出微分形式A-调和方程(1)解 u 的迭代算子 $D^k G^k(u)$ 的全局估计。

定理4 在定理1的条件下,存在与 u 无关正常数 C ,使得

$$\| D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B \|_{W_{\Omega}^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\Omega}^\varphi}$$

其中 $1 \leq p < q < \infty$ 。

证明:由Whitney迭代覆盖引理,定理3的注可得

$$\| \nabla Td(D^k G^k(u)) \|_{L_{\Omega}^\varphi} \leq C \sum_{B \subset V} \| \nabla Td(D^k G^k(u)) \|_{L_B^\varphi} \leq C \sum_{B \subset V} \| u \|_{L_{\sigma_1 B}^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\Omega}^\varphi}$$

类似可得

$$\| Td(D^k G^k(u)) \|_{L_{\Omega}^\varphi} \leq C \sum_{B \subset V} \| Td(D^k G^k(u)) \|_{L_B^\varphi} \leq C \sum_{B \subset V} \| u \|_{L_{\sigma_1 B}^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\Omega}^\varphi}$$

结合引理1与Orlicz-Sobolev范数的定义有

$$\| D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B \|_{W_{\Omega}^\varphi} = \| Td(D^k G^k(u)) \|_{W_{\Omega}^\varphi} \leq C \| Td(D^k G^k(u)) \|_{L_{\Omega}^\varphi} + C \| \nabla Td(D^k G^k(u)) \|_{L_{\Omega}^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\Omega}^\varphi}$$

因此不等式

$$\| D^k G^k(u) - (D^k G^k(u))_B \|_{W_{\Omega}^\varphi} \leq C \| u \|_{L_{\Omega}^\varphi}$$

成立。

其中 $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma > 1$,定理证毕。

在证明定理5之前给出如下引理。受文[24]的启发,我们给出迭代算子的如下估计。

引理7 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界域,微分形式 $u \in L_{loc}^p(\Omega, \Lambda)$, D 是Hodge-Dirac算子且 G 是Green算子,则有

$$D^{2k} G^k(u) = D^2 G(u)$$

其中指数 $0 < p < \infty$ 。

证明:对于任意 $u \in L^p(\Omega, \Lambda)$,由Hodge分解定理得

$$\begin{aligned} u &= \Delta G(u) + H(u) = \\ &= dd^* G(u) + d^* dG(u) + H(u) = \\ &= D^2 G(u) + H(u) \end{aligned}$$

因此

$$D^2 G(u) = u - H(u) \quad (12)$$

因为格林算子 $G(u)$ 的调和投影恒为0,故 $G \circ H(u) = 0$ 。选择 $G(u)$ 代替式(12)中的 u 得

$$D^2 G(G(u)) = G(u) - H \circ G(u) = G(u) \quad (13)$$

下面计算 $D^{2k} G^k(u)$,反复用式(13)迭代得

$$\begin{aligned} D^{2k} G^k(u) &= D^2 (D^{2k-2} G^{k-1} \circ G(u)) = \\ &= D^2 (D^{2k-4} G^{k-2} \circ G(u)) = D^2 G(u) \end{aligned}$$

证毕

注:1) 引理3与式(14)结合得

$$\| D^{2k} G^k(u) \|_{s,B} = \| D^2 G(u) \|_{s,B} \leq C \| u \|_{s,\sigma B} \quad (15)$$

2) 类似可得

$$\| D^{2k-1} G^k(u) \|_{s,B} = \| DG(u) \|_{s,B} \leq C \| u \|_{s,\sigma B} \quad (16)$$

其中 $\sigma > 1$ 。

引理8 设有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,微分形式 $u \in L_{loc}^s(\Omega, \Lambda)$, D 是Hodge-Dirac算子,且 G 是Green算子,则对于任意正整数 $k = 1, 2, \dots$,存在常数 $C > 0$,使得

$$\| D^{k+l} G^k(u) \|_{s,B} \leq C \| u \|_{s,\sigma B}$$

对于所有球体 $B \subset \sigma B \subset \Omega$ 均成立,其中 $\sigma > 1$ 是某一参数且指数 $1 < s < \infty, 1 \leq l \leq k, l \in \mathbb{Z}$ 。

证明:由式(15),(16)知,当 $l = k - 1, k$ 时,

$$\| D^{k+l} G^k(u) \|_{s,B} \leq C \| u \|_{s,\sigma B}$$

下面主要研究 $1 \leq l \leq k - 2$ 这种情况。

当 $k = 2m + 1, l = 2n + 1$ 和 $n \leq m - 1$ 时, 其中 $m = 1, 2, \dots$ 有

$$\begin{aligned} D^{k+l} G^k(u) &= D^{2m+2n+2} G^{2m+1}(u) = \\ (D^{2m+2n+2} G^{m+n+1}) G^{m-n}(u) &= \\ G^{m-n}(u) \end{aligned}$$

因此

$$\|D^{k+l} G^k(u)\|_{s,B} = \|G^{m-n}(u)\|_{s,B} \leq C \|u\|_{s,\sigma B}$$

对其他的 3 种情况

$$k = 2m + 1, l = 2n$$

$$k = 2m + 2, l = 2n + 1$$

$$k = 2m + 2, l = 2n$$

利用上述讨论, 也可以得到类似的结果。

因此对于任意的 $1 \leq l \leq k, l \in \mathbb{Z}$ 有

$$\|D^{k+l} G^k(u)\|_{s,B} \leq C \|u\|_{s,\sigma B}$$

证毕。

最后我们增加定理 1 中 Hodge-Dirac 算子的阶数做进一步的推广, 给出迭代算子 $D^{k+l-1} G^k(u)$ 的 L^φ -估计。

定理 5 在定理 1 的条件下, 存在与微分形式 u 无关正常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|D^{k+l-1} G^k(u) - (D^{k+l-1} G^k(u))_B\|_{L_B^\varphi} &\leq \\ C \|u\|_{L_{\sigma_2 B}^\varphi} \end{aligned}$$

对于任意球体 $B \subset \sigma_2 B \subset \Omega$ 均成立, 其中 $\sigma_2 > 1$ 。

证明: 因为 $D^{k+l-1} G^k(u)$ 是 l -微分形式, 由定理 1 可得

$$\begin{aligned} \|D^{k+l-1} G^k(u) - (D^{k+l-1} G^k(u))_B\|_{L_B^\varphi} &= \\ \|Td(D^{k+l-1} G^k(u))\|_{L_B^\varphi} \end{aligned}$$

因此只需证明

$$\|Td(D^{k+l-1} G^k(u))\|_{L_B^\varphi} \leq C \|u\|_{L_{\sigma_2 B}^\varphi}$$

已知 g 是单调递增下凸函数, 因此 g^{-1} 为上凸函数, 则由式(3)、 $G(p, q, C)$ -类的性质、Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_B \varphi(Td(D^{k+l-1} G^k(u))) dx &= \\ g g^{-1}(\int_B \varphi(Td(D^{k+l-1} G^k(u))) dx) &\leq \\ g(\int_B g^{-1}(\varphi(Td(D^{k+l-1} G^k(u)))) dx) &\leq \\ g(\int_B C (Td(D^{k+l-1} G^k(u)))^q dx) &\leq \\ C \varphi(\int_B (Td(D^{k+l-1} G^k(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

由式(5)及 G 算子与 D 算子的交换性可得

$$\begin{aligned} C \varphi(\int_B (Td(D^{k+l-1} G^k(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} &\leq \\ C \varphi(\int_B (d(D^{k+l-1} G^k(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} &\leq \end{aligned}$$

$$C \varphi(\int_B (dG(D^{k+l-1} G^{k-1}(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

由引理 3 和引理 8 可得

$$\begin{aligned} C \varphi(\int_B (dG(D^{k+l-1} G^{k-1}(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} &\leq \\ C \varphi(\int_{\sigma B} ((D^{k+l-1} G^{k-1}(u)))^q dx)^{\frac{1}{q}} &\leq \\ C \varphi(\int_{\sigma_2 B} |u|^q dx)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

其中 $\sigma_2 > \sigma > 1$ 。

重复定理 1 中的方法可得

$$\begin{aligned} \|D^{k+l-1} G^k(u) - (D^{k+l-1} G^k(u))_B\|_{L_B^\varphi} &\leq \\ C \|u\|_{L_{\sigma_2 B}^\varphi} \end{aligned}$$

成立。定理得证。

3 结论

本文研究了微分形式 A -调和方程解的算子范数估计。借助于常用的基本不等式及 Whitney 覆盖引理, 证明了在 Orlicz 空间中, Dirac 算子与格林算子的高阶迭代估计式。这在积分估计中有着重要的应用, 同时也促进了调和分析中算子理论的进一步发展。

参考文献:

- [1] DING S. Integral Estimates for the Laplace-Beltrami and Green's Operators Applied to Differential Forms on Manifolds[J]. Zeitschrift Für Analysis Und Ihre Anwendungen, 2003, 22(4): 939.
- [2] DING S, LIU B. Norm Inequalities for Composition of the Dirac and Green's Operators[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 2013(1): 1.
- [3] WANG Y, LI X, XING Y. Lipschitz and BMO Norm Inequalities for the Composite Operator on Differential Forms[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 2015(1): 1.
- [4] DING S, SHI G, XING Y. Higher Integrability of Iterated Operators on Differential Forms[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2016, 145: 83.
- [5] XING Y, DING S. Higher Integrability of Green's Operator and Homotopy Operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 446(1): 648.
- [6] XING Y, DING S. Advances in Study of Poincare Inequalities and Related Operators[J]. Journal of Function Spaces, 2014, 2014(1): 1.
- [7] LI H, LI Q. Some Weighted Norm Estimates for the Composition of the Homotopy and Green's Operator[C]//

- Abstract and Applied Analysis. Hindawi, 2014, (1):1.
- [8] DING S, LIU B. Dirac-harmonic Equations for Differential Forms[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2015, 122: 43.
- [9] DING S. New Weighted Integral Inequalities for Differential Forms in Some Domains[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2000, 194(1): 43.
- [10] 李华灿, 李群芳, 李师煜. 关于 Green 算子的 Orlicz 范数估计[J]. 江西理工大学学报, 2015, 36(5): 110.
LI H C, LI Q F, LI S L. The Orlicz Norm Estimator for the Green Operator[J]. Journal of Jiangxi University of Science and Technology, 2015, 36(5): 110.
- [11] DO C. Differential Forms and Applications[M]. Springer Science & Business Media, 1998.
- [12] LEUTWILER H. Modified Clifford Analysis[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 1992, 17(3/4): 153.
- [13] AGARWAL R, DING S, NOLDER C. Inequalities for Differential Forms[M]. Springer Science & Business Media, 2009.
- [14] HEBEY E. Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds[M]. Springer Science & Business Media, 1996.
- [15] JIA H, LI D, WANG L. Regularity in Orlicz Spaces for the Poisson Equation[J]. Manuscripta Mathematica, 2007, 122(3): 265.
- [16] IWANIEC T, MARTIN G. Geometric Function Theory and Non-linear Analysis[M]. Clarendon Press, 2001.
- [17] CHERNOFF P. Essential Self-adjointness of Powers of Generators of Hyperbolic Equations[J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 12(4): 401.
- [18] AUBIN T. Espace De Sobolev Sur Les Variétés Riemanniennes[J]. Bull. Sci. Math., 1976, 100: 149.
- [19] BUCKLEY S M, KOSKELA P. Orlicz-hardy Inequalities[J]. Illinois Journal of Mathematics, 2004, 48(3): 787.
- [20] IWANIEC T, LUTOBORSKI A. Integral Estimates for Null Lagrangians[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1993, 125(1): 25.
- [21] SCOTT C. L^p Theory of Differential Forms on Manifolds[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(6): 2075.
- [22] NOLDER C. Hardy-Littlewood Theorems for A-harmonic Tensors[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1999, 43(4): 613.
- [23] WANG Y, WU C. Sobolev Imbedding Theorems and Poincaré Inequality[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2004, 47: 1545.
- [24] 石冠男. Dirac - 调和方程解的性质及其相关算子的范数估计[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.

(编辑: 温泽宇)